第 8 講　２次不等式の利用

PART1　２次関数のグラフと２次方程式・２次不等式

例題

(1)　２次関数 $y=x^2+mx+m$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　すべての実数 x について $x^2-(k-1)x+3>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　２次関数 $y=-x^2+(m-1)x-m+1$ のグラフが次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(i)　x 軸と共有点をもつ　　　(ii)　x 軸と共有点をもたない

(2)　すべての実数 x について $-x^2+2ax-a-2<0$ が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

第８講　PART1　確認問題

1　2 次関数 $y=-x^2+(m+2)x-3m+2$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

$m \leqq$ [ア]，[イ] $\leqq m$

2　2 次関数 $y=-x^2+(m+2)x-3m+2$ のグラフが x 軸と共有点をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

[ウ] $< m <$ [エ]

3　2 次不等式 $x^2+ax+2>0$ がすべての実数 x で成り立つように定数 a の範囲を定めよ。

[オカ]$\sqrt{[キ]} < a <$ [ク]$\sqrt{[ケ]}$

第 8 講　2 次不等式の利用

PART1　2 次関数のグラフと 2 次方程式・2 次不等式

例題

(1)　2 次関数 $y=x^2+mx+m$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　すべての実数 x について $x^2-(k-1)x+3>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

(1)　2 次方程式 $x^2+mx+m=0$ の判別式を D とすると，

$$D=m^2-4\cdot1\cdot m=m^2-4m=m(m-4)$$

グラフが x 軸と共有点をもつのは $D\geqq0$ のときであるから

$m(m-4)\geqq0$　　よって $m\leqq0$，$4\leqq m$

(2)　2 次関数 $y=x^2-(k-1)x+3$ のグラフは下に凸の放物線である。よって，すべての実数 x について不等式が成り立つのは，このグラフが x 軸と共有点をもたないときである。したがって，2 次方程式 $x^2-(k-1)x+3=0$ の判別式を D とすると

$$D=\{-(k-1)\}^2-4\cdot1\cdot3=k^2-2k-11<0$$

よって　$1-2\sqrt{3}<k<1+2\sqrt{3}$

練習

(1)　2 次関数 $y=-x^2+(m-1)x-m+1$ のグラフが次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(i)　x 軸と共有点をもつ　　(ii)　x 軸と共有点をもたない

(2)　すべての実数 x について $-x^2+2ax-a-2<0$ が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(1)　2 次方程式 $-x^2+(m-1)x-m+1=0$ の判別式を D とすると，

$$D=(m-1)^2-4\cdot(-1)\cdot(-m+1)=m^2-6m+5=(m-1)(m-5)$$

(i)　グラフが x 軸と共有点をもつのは $D\geqq0$ のときであるから

$(m-1)(m-5)\geqq0$　　よって，$m\leqq1$，$5\leqq m$

(ii)　グラフが x 軸と共有点をもたないのは $D<0$ のときであるから

$(m-1)(m-5)<0$　　よって，$1<m<5$

(2)　2 次関数 $y=-x^2+2ax-a-2$ のグラフは上に凸の放物線である。よって，すべての実数 x について不等式が成り立つのは，このグラフが x 軸と共有点をもたないときである。したがって，2 次方程式 $-x^2+2ax-a-2=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-(-1)\cdot(-a-2)=a^2-a-2=(a+1)(a-2)<0$$

よって　$-1<a<2$

第 8 講　PART1　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イ：6

[解説]

2 次方程式 $-x^2+(m+2)x-3m+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=(m+2)^2-4\cdot(-1)\cdot(-3m+2)$$
$$=m^2-8m+12$$
$$=(m-2)(m-6)$$

グラフが x 軸と共有点をもつのは $D\geqq 0$ のときであるから [A]

$$(m-2)(m-6)\geqq 0$$

したがって　$\boldsymbol{m\leqq 2,\ 6\leqq m}$

[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつ
$\Longleftrightarrow D\geqq 0$
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもたない
$\Longleftrightarrow D<0$

2　**[正解]** ウ：2，エ：6

[解説]

2 次方程式 $-x^2+(m+2)x-3m+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=(m+2)^2-4\cdot(-1)\cdot(-3m+2)$$
$$=m^2-8m+12$$
$$=(m-2)(m-6)$$

グラフが x 軸と共有点をもたないのは $D<0$ のときであるから [B]

$$(m-2)(m-6)<0$$

したがって　$\boldsymbol{2<m<6}$

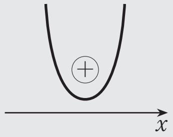
[B]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつ
$\Longleftrightarrow D\geqq 0$
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもたない
$\Longleftrightarrow D<0$

3 [正解] オカ：-2，キ：2，ク：2，ケ：2

[解説]

2次関数 $y=x^2+ax+2$ のグラフは下に凸の放物線である。よって，すべての実数 x について不等式が成り立つのは，このグラフが x 軸と共有点をもたないときである。したがって，2次方程式 $x^2+ax+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=a^2-4\cdot1\cdot2=a^2-8<0$$ [C]

よって　$-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

[C]　$ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると
不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解がすべての実数
$\Longleftrightarrow$　$a>0$ かつ $D<0$